PART4　２次関数の決定

例題

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(2,\ 1)$ で，点 $(1,\ 4)$ を通る。

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したもので，２点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通る。

(3)　３点 $(-1,\ -3)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 3)$ を通る。

Point Pickup

練習

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　$x=-2$ のとき最大値 5 をとり，点 $(2,\ -11)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=-1$ で，2 点 $(-3,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を通る。

(3)　3 点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を通る。

第 6 講　PART4　確認問題

1 $x=-1$ のとき最大値 4 をとり，グラフが点 $(2,\ -5)$ を通る 2 次関数の式は

$$y=\boxed{ア}\left(x+\boxed{イ}\right)^2+\boxed{ウ}$$

2 グラフの軸が直線 $x=2$ で，グラフが 2 点 $(-1,\ 28)$, $(1,\ 4)$ を通る 2 次関数の式は

$$y=\boxed{エ}\left(x-\boxed{オ}\right)^2+\boxed{カ}$$

3 グラフが 3 点 $(1,\ 6)$，$(-2,\ 21)$，$(2,\ 9)$ を通る 2 次関数の式は

$$y=\boxed{キ}x^2-\boxed{ク}x+\boxed{ケ}$$

PART4　２次関数の決定

例題

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 (2，1) で，点 (1，4) を通る。

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したもので，２点 (1，1)，(2，3) を通る。

(3)　３点 (−1，−3)，(1，5)，(2，3) を通る。

(1)　頂点が点 (2，1) であることより，求める２次関数の式は

$$y=a(x-2)^2+1$$

と表すことができる。グラフが点 (1，4) を通るから

$$4=a(1-2)^2+1 \qquad a=3$$

よって，求める２次関数は　$y=3(x-2)^2+1$

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したものであることより，求める２次関数の式は

$$y=-2x^2+bx+c$$

と表すことができる。グラフが２点 (1，1)，(2，3) を通るから

$$\begin{cases}1=-2+b+c\\3=-8+2b+c\end{cases}\quad \text{これを解いて}\quad \begin{cases}b=8\\c=-5\end{cases}$$

よって，求める２次関数は $y=-2x^2+8x-5$

(3)　求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

グラフが３点 (−1，−3)，(1，5)，(2，3) を通るから

$$\begin{cases}-3=a-b+c & \cdots\cdots①\\5=a+b+c & \cdots\cdots②\\3=4a+2b+c & \cdots\cdots③\end{cases}$$

② − ①より　$2b=8$　　$b=4$　……④

④を①に代入して整理すると $a+c=1$　……⑤

④を③に代入して整理すると $4a+c=-5$　……⑥

⑤，⑥より $a=-2$，$c=3$　　④より $b=4$

よって，求める２次関数は　$y=-2x^2+4x+3$

(別解)

③ − ①より　$3a+3b=6$　よって $a+b=2$　……⑦

③－②より　$3a+b=-2$　……⑧

⑦，⑧より $a=-2$，$b=4$　　このとき①より $c=3$

よって，求める2次関数は　$y=-2x^2+4x+3$

練習

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1)　$x=-2$ のとき最大値5をとり，点 $(2,\ -11)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=-1$ で，2点 $(-3,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を通る。

(3)　3点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を通る。

(1)　$x=-2$ のとき最大値5をとることより，求める2次関数の式は

$$y=a(x+2)^2+5$$

と表すことができる。グラフが点 $(2,\ -11)$ を通るから

$$-11=a(2+2)^2+5 \qquad a=-1$$

よって，求める2次関数は　$y=-(x+2)^2+5$

(2)　軸が $x=-1$ であることより，求める2次関数の式は

$$y=a(x+1)^2+q$$

と表すことができる。グラフが2点 $(-3,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を通るから

$$\begin{cases} 3=4a+q \\ -3=a+q \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad \begin{cases} a=2 \\ q=-5 \end{cases}$$

よって，求める2次関数は $y=2(x+1)^2-5$

(3)　求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

グラフが3点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を通るから

$$\begin{cases} 0=a+b+c & \cdots\cdots① \\ 0=4a-2b+c & \cdots\cdots② \\ -2=9a-3b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②－①より　$3a-3b=0$　　$a=b$　……④

③－②より　$5a-b=-2$　……⑤

④，⑤より　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$　　このとき①より $c=1$

よって，求める2次関数は　$y=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$

（別解）

グラフが 2 点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を通ることより，求める 2 次関数の式は

$$y=a(x-1)(x+2)$$

と表すことができる。さらに，点 $(-3,\ -2)$ を通ることから

$$-2=a\cdot(-4)\cdot(-1) \qquad a=-\frac{1}{2}$$

よって，求める 2 次関数は　$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)(x+2)$

第 6 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：－，イ：1，ウ：4

[解説]

$x=-1$ のとき最大値 4 をとることにより，求める 2 次関数の式は $y=a(x+1)^2+4$ $(a<0)$ と表すことができる。 [A]

このグラフが点 $(2,\ -5)$ を通るから

$$-5=a(2+1)^2+4$$

$$-5=9a+4$$

$$9a=-9$$

$$a=-1$$

これは $a<0$ を満たす。

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-(x+1)^2+4}$

[A]　2 次関数の決定
次のように式をおく。
・グラフの頂点や軸の情報が与えられている場合
$\Longrightarrow y=a(x-p)^2+q$
・グラフの頂点や軸の情報が与えられていない場合
$\Longrightarrow y=ax^2+bx+c$

2

[正解] エ：3，オ：2，カ：1

[解説]

軸が直線 $x=2$ であることにより，求める 2 次関数の式は $y=a(x-2)^2+q$ と表すことができる。 [B]

グラフが 2 点 $(-1,\ 28)$，$(1,\ 4)$ を通るから

$$\begin{cases} 28=9a+q \\ 4=a+q \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} a=3 \\ q=1 \end{cases}$$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=3(x-2)^2+1}$

[B]　2 次関数の決定
次のように式をおく。
・グラフの頂点や軸の情報が与えられている場合
$\Longrightarrow y=a(x-p)^2+q$
・グラフの頂点や軸の情報が与えられていない場合
$\Longrightarrow y=ax^2+bx+c$

3 [正解] キ：2，ク：3，ケ：7

[解説]

求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。 [C]

このグラフが３点 (1, 6)，(−2, 21)，(2, 9) を通るから

$$\begin{cases} 6=a+b+c & \cdots\cdots① \\ 21=4a-2b+c & \cdots\cdots② \\ 9=4a+2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

② − ①より　$3a-3b=15$　　$a-b=5$　……④

③ − ②より　$4b=-12$　　$b=-3$　……⑤

④，⑤より　$a=2$

このとき　①より　$c=7$

よって，求める２次関数は　$\boldsymbol{y=2x^2-3x+7}$

[C]　２次関数の決定
次のように式をおく。
・グラフの頂点や軸の情報が与えられている場合
$\Longrightarrow y=a(x-p)^2+q$
・グラフの頂点や軸の情報が与えられていない場合
$\Longrightarrow y=ax^2+bx+c$